Compactness of commutators generated by VMO functions and fractional integral operator on Morrey spaces

中央大学　理工学研究科　数学専攻

竹迫　大起 (Daiki TAKESAKO) *

概要

本講演では既存の VMO 関数と分数冪積分作用素が生成する多重線形な commutator の Morrey 空間上のコンパクト性を改良した結果について紹介する。具体的には Morrey 空間の閉部分空間の分解を用いることことで、このような commutator が閉部分空間へのコンパクト作用素になっていることを示す。

1　導入

本講演では既存の VMO 関数と分数冪積分作用素が生成する多重線形な commutator の Morrey 空間上のコンパクト性を改良した結果について共有する．まず Morrey 空間とは以下のノルムで定められるような空間である．

Definition 1.1 (Morrey 空間)**.** 中心 x, 半径 $r > 0$ の開球を $B(x, r)$ とする．また $1 \leq q \leq p < \infty$ とする．$f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して Morrey ノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_q}$ を,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} := \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}$$

と定める．Morrey 空間はこのノルムが有限となる $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 関数全体の集合である．

定義において $p = q$ とすると $\mathcal{M}^p_p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ となるため Morrey 空間は $L^p(\mathbb{R}^n)$ の一般化の 1 つとなっている．また Hölder の不等式より $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq p \leq \infty$ に対して, $\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q_1}} \leq \|f\|_{\mathcal{M}^p_{q_2}} \leq \|f\|_{\mathcal{M}^p_p} = \|f\|_{L^p}$ が得られる．しかし $p \neq q$ のとき $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ より広い．実際, $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ とすると $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ であるが $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ である．

また分数冪積分作用素とは以下の定義によって与えられる作用素である．

Definition 1.2 (分数冪積分作用素)**.** $L^0(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数全体の集合とする．$0 < \alpha < n$ とする．このとき右辺が意味を持つ限り分数冪積分作用素 I_α を以下のように定める．

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \mathrm{d}y, \quad (f \in L^0(\mathbb{R}^n)).$$

* E-mail:takesako.math@gmail.com

1975 年の D. R. Adams の結果 [1] により，分数冪積分作用素は Morrey 空間から別の Morrey 空間へ有界な作用素になることが知られている．

Proposition 1.3 (D. R. Adams[1])**.** $1 < q \le p < \infty$, $1 < t \le s < \infty$, $0 < \alpha < n$ とする．また s, t は

$$\frac{q}{p} = \frac{t}{s}, \quad \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{s}.$$

を満たすとする．このとき任意の $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ に対して $I_\alpha f(x)$ の定義内の積分はほとんどいたるところの $x \in \mathbb{R}^n$ で絶対収束し以下の評価が得られる．ただし定数 c は関数 f に依存しない:

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}^s_t} \le c\|f\|_{\mathcal{M}^p_q}.$$

次に VMO 関数を定義するためにまず $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ を定義する．

Definition 1.4 ($\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$)**.** $a \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ が $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ の元であるとは

$$\|a\|_* := \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |a(y) - m_{B(x,r)}(a)| \mathrm{d}y < \infty$$

を満たすことをいう．ただし $m_{B(x,r)}(a)$ は関数 a の $B(x,r)$ 上の積分平均を表す.

上記の $\|\cdot\|_*$ はノルムではないが定数関数で割ることでノルムとなる．定義よりすぐに $C^\infty_c(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ という包含関係がわかる．この事実のもとで VMO 関数を以下のように定義する．

Definition 1.5 ($\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$)**.** $a \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ が $a \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ であるとは，$\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ が存在して $\lim_{j\to\infty} \|a - a_j\|_* = 0$ を満たすことをいう．

この定義と同値なものとして以下も挙げておく．$\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ の定義としてこちらを採用することもある．

Lemma 1.6. $a \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$a \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ と

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |a(y) - m_{B(x,r)}(a)| \mathrm{d}y = 0$$

は同値である．

BMO 関数，VMO 関数の例として $\log|\cdot|$, $(\log|\cdot|)_+^{1/2} = (\chi_{[1,\infty)}(\cdot)\log|\cdot|)^{\frac{1}{2}}$ がそれぞれ挙げられる．この例と Lemma から $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ は $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ と一致しないこと，$\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ と $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ は互いに包含関係がないことがわかる．

本講演で対象とするのは上記の分数冪積分作用素と VMO 関数の生成する多重線形な commutator である．まず関数 a_1 を各点でかける作用素 a_1 と分数冪積分作用素 I_α で生成される commutator$[a_{\{1\}}, I_\alpha]$ を $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して右辺が意味を持つ限り $[a_{\{1\}}, I_\alpha]f := a_1 I_\alpha(f) - I_\alpha(a_1 f)$ と定める．これをもとに多重線形な commutator$[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]$ を commutator たちの入れ子として定義する: $[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha] := [a_1, [a_{\{2,\dots,l\}}, I_\alpha]]$．本講演では関数 a_j たちを BMO 関数としてとることにする．つまり対象とする多重線形な commutator$[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]$ を以下のように定める．

Definition 1.7. $l \in \mathbb{N}$ とする．$a_j \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1, ..., l)$ とし $0 < \alpha < n$ とする．$f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して多重線形な commutator $[a_{\{1,...,l\}}, I_\alpha]$ を

$$[a_{\{1,...,l\}}, I_\alpha]f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{l} (a_j(x) - a_j(y)) \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

と右辺が意味を持つ限り定める．

作用素 $[a_{\{1,...,l\}}, I_\alpha]$ が Morrey 空間上有界であることは Dongyong Yang，Yan Meng らによって 2005 年に示されている．[2]

Proposition 1.8 ([2])**.** $l \in \mathbb{N}$，$a_j \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1, ..., l)$，$1 < q \le p < \infty$，$0 < \alpha < n$，$\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$，$\dfrac{p}{q} = \dfrac{s}{t}$ とする．このとき

$$\|[a_{\{1,...,l\}}, I_\alpha]\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}^s_t(\mathbb{R}^n)} \le C \prod_{j=1}^{l} \|a_j\|_*$$

が成り立つ．ただし定数 C は $\{a_j\}_{j=1}^l$ に依存しないものである．

また 2008 年には澤野，白井が作用素 $[a_{\{1,...,l\}}, I_\alpha]$ が $a_1 \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ のときにコンパクトになることを示した．[5]

Proposition 1.9 ([5])**.** $1 < q \le p < \infty$，$l \in \mathbb{N}$，$a_1 \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$，$a_j \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 2, ..., l)$ とする．また s, t を以下を満たすようにとる．

$$\frac{p}{q} = \frac{s}{t} \quad \text{and} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} > 0.$$

このとき作用素 $[a_{\{1,...,l\}}, I_\alpha]$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ から $\mathcal{M}^s_t(\mathbb{R}^n)$ へのコンパクト作用素となる．

さらには 2025 年に澤野，D. Hakim，竹迫が作用素 $[a_{\{1\}}, I_\alpha]$ が Proposition 1.9 の $l = 1$ のケースにおいて作用素の値域を狭めた．[4]

Proposition 1.10 ([4])**.** $l = 1$，$0 < \alpha < n$，$1 < q \le p < \infty$，$a_1 \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ とする．$1 < t \le s < \infty$ が以下を満たすとする

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \quad \text{and} \quad \frac{q}{p} = \frac{t}{s}.$$

このとき *commutator* $[a_{\{1\}}, I_\alpha]$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ から $\widetilde{\mathcal{M}}^s_t(\mathbb{R}^n)$ へのコンパクト作用素となる．ただし $\widetilde{\mathcal{M}}^s_t(\mathbb{R}^n)$ は $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^s_t(\mathbb{R}^n)}$ における $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ の閉包である．

2　準備

このセクションでは主定理の記述やその証明の概略を追うのに必要な Morrey 空間の閉部分空間についての定義や性質について記す．まず初めに Morrey 空間の閉部分空間について定義をする．

Definition 2.1 (Closed subspaces of Morrey spaces)**.** コンパクト台を持つ可測関数全体を $L^0_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ と表す．$1 \le q \le p < \infty$ として以下のように閉部分空間を定める．

(1) $C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ の $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ ノルムでの閉包を $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ とする．
(2) $L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ の $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ ノルムでの閉包を $\overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ とかく．
(3) $L^0_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ の $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ ノルムでの閉包を $\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ とする．

また $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$，$\overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$，$\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ には特徴付けがあり [3] にまとめられている．

Lemma 2.2 ([3])**.** $1 \le q \le p < \infty$ とする．このとき以下が成り立つ．

$$\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) : \lim_{R\to\infty} \|f\chi_{\{|f|>R\}\cup(\mathbb{R}^n\setminus B(R))}\|_{\mathcal{M}^p_q} = 0\},$$

$$\overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) : \lim_{R\to\infty} \|f\chi_{[R,\infty)}(|f|)\|_{\mathcal{M}^p_q} = 0\},$$

$$\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) : \lim_{R\to\infty} \|f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B(R)}\|_{\mathcal{M}^p_q} = 0\}.$$

この Lemma より $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ に対して以下の分解が得られる．

Lemma 2.3 ([3])**.**

$$\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n) \cap \overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n).$$

Lemma 2.2 とこの分解を見れば $f \in \widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ を示す際の 1 つの難所は $f \in \overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ を示すことのように見える．そこで以下の命題を用いて少し扱いやすくしておく．

Proposition 2.4 ([4], Lemma 6)**.**

$$1 < q \le p < \infty, \quad 1 < t \le s < \infty, \quad p < s, \quad \text{and} \quad \frac{q}{p} = \frac{t}{s},$$

とする．このとき

$$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^s_t(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．

3 主定理

ここでは講演者が明らかにした新規の結果について記す．具体的には以下の定理を明らかにした．

Theorem 3.1 ([6], Preprint, arXiv:2601.09175)**.** $1 < q \le p < \infty$，$l \in \mathbb{N}$，$a_1 \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$，$a_j \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$（$j = 2, ..., l$）とする．また s, t を以下を満たすようにとる．

$$\frac{p}{q} = \frac{s}{t} \quad \text{and} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} > 0.$$

このとき作用素 $[a_{\{1,...,l\}}, I_\alpha]$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ から $\widetilde{\mathcal{M}}^s_t(\mathbb{R}^n)$ へのコンパクト作用素となる．

先行研究との違いは作用素が $\mathcal{M}_t^s(\mathbb{R}^n)$ ではなく $\widetilde{\mathcal{M}}_t^s(\mathbb{R}^n)$ への写像になっているという点である．この定理によって $[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f$ が $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ 内で $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ で近似できることがわかった．またこの定理において $l=1$ としたものが Proposition 1.10 である．

4　証明の概略

ここでは主定理の証明の概略を紹介する．

“$A \lesssim B$” と書いた際には A, B に関係のない定数 $C>0$ が存在して $A \le CB$ を満たすことを示す．また $A \sim B$ は $A \lesssim B$ と $B \lesssim A$ がどちらも成り立つことを意味する．さらに定数 C が D に依存するとき $A \lesssim_D B$ とかく．

証明では以下の Lemma を用いる．

Lemma 4.1. $l \in \mathbb{N},\ j=1,\dots,l$ に対し $a_j \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n),\ 1<q\le p<\infty,\ 0<\alpha<n,\ \dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}$ *and* $\dfrac{p}{q}=\dfrac{s}{t}$ とする．このとき

$$\forall a_1 \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^n), \quad [a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha] : \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \to \widetilde{\mathcal{M}}_t^s(\mathbb{R}^n) : \mathit{bounded}$$

が成り立つならば

$$\forall a_1 \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n), \quad [a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha] : \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \to \widetilde{\mathcal{M}}_t^s(\mathbb{R}^n) : \mathit{compact}$$

である．

この Lemma と Lemma 2.3 により任意の $f \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ と $a_1 \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して $[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f \in \overset{*}{\mathcal{M}}{}_t^s(\mathbb{R}^n)$ と $[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f \in \overline{\mathcal{M}}{}_t^s(\mathbb{R}^n)$ を示せば良い．

また複数回使う評価についてここで先に述べておく．

Lemma 4.2. $1\le q\le p<\infty, \quad g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n), \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad \alpha \ge \beta > 0, \quad y \in B(0,\beta)$ とする．このとき以下の評価が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\|\chi_{B(0,2^{k+1}\alpha)\setminus B(0,2^k\alpha)}|g-g(y)|\|_{\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim (2^k\alpha)^{\frac{n}{p}} \left\{ \|g\|_* \log_2\left(\frac{2^{k+1}\alpha}{\beta}\right) + |g(y)-m_{B(0,\beta)}(g)| \right\}.
\end{aligned}$$

4.1　Proof of $[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f \in \overset{*}{\mathcal{M}}{}_t^s(\mathbb{R}^n)$

$\mathrm{supp}(a_1) =: K$，$R \gg 1$ とする．Minkowski の不等式より

$$\begin{aligned}
&\|\chi_{B(0,R)^c}[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_t^s(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \chi_{B(0,R)^c} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=2}^{l} (a_j(\cdot)-a_j(y)) \frac{a_1(y)f(y)}{|\cdot - y|^{n-\alpha}} dy \right\|_{\mathcal{M}_t^s(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \chi_{B(0,R)^c} \frac{\prod_{j=2}^{l}(a_j(\cdot)-a_j(y))}{|\cdot - y|^{n-\alpha}} \right\|_{\mathcal{M}_t^s(\mathbb{R}^n)} |a_1(y)f(y)|dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \int_K \left\| \chi_{\{2^{k-1}R<|\cdot|<2^k R\}} \frac{\prod_{j=2}^{l}(a_j(\cdot)-a_j(y))}{|\cdot-y|^{n-\alpha}} \right\|_{\mathcal{M}_t^s(\mathbb{R}^n)} |a_1(y)f(y)|dy \\
&\lesssim_{a_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k R)^{n-\alpha}} \int_K \left\| \chi_{\{2^{k-1}R<|\cdot|<2^k R\}} \prod_{j=2}^{l} |a_j(\cdot)-a_j(y)| \right\|_{\mathcal{M}_t^s(\mathbb{R}^n)} |f(y)|dy.
\end{aligned}
$$

ここで $\frac{1}{s}=\frac{l-1}{u}$ とする．Lemma 4.2 と Hölder の不等式を用いて

$$
\begin{aligned}
&\|\chi_{B(0,R)^c}[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_t^s(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k R)^{n-\alpha}} \int_K \prod_{j=2}^{l} \left\| \chi_{\{2^{k-1}R<|\cdot|<2^k R\}} |a_j - a_j(y)| \right\|_{L^u(\mathbb{R}^n)} |f(y)|dy \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k R)^{n-\alpha}} \int_K (2^k R)^{\frac{n(l-1)}{u}} \prod_{j=2}^{l} \left\{ \|a_j\|_* \log_2\left(\frac{2^k R}{\beta}\right) + |a_j(y)-m_K(a_j)| \right\} |f(y)|dy \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^k R)^{\frac{n}{s}}}{(2^k R)^{n-\alpha}} \int_K \left\{ \log_2\left(\frac{2^k R}{\beta}\right) \right\}^{l-1} \prod_{j=2}^{l} \left\{ \|a_j\|_* + |a_j(y)-m_K(a_j)| \right\} |f(y)|dy \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^k R)^{\frac{n}{s}}}{(2^k R)^{n-\alpha}} \left\{ \log_2\left(\frac{2^k R}{\beta}\right) \right\}^{l-1} \|f\|_{L^q(K)} \left\| \prod_{j=2}^{l} \{ \|a_j\|_* + |a_j(y)-m_K(a_j)| \} \right\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(K)} \\
&\lesssim_{\{a_j\},f} \sum_{k=1}^{\infty} (2^k R)^{\frac{n}{s}-n+\alpha} \left\{ \log_2\left(\frac{2^k R}{\beta}\right) \right\}^{l-1}
\end{aligned}
$$

を得る．$\rho>0$ を以下を満たすようにとる．

$$
-\frac{n}{s}+n-\alpha>\rho>0.
$$

このとき対数関数に注意すれば

$$
\begin{aligned}
&\|\chi_{B(0,R)^c}[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_t^s(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} (2^k R)^{\frac{n}{s}-n+\alpha} \left\{ \left(\frac{2^k R}{\beta}\right)^{\frac{\rho}{l-1}} \right\}^{l-1} \\
&\sim R^{\frac{n}{s}-n+\alpha+\rho} \\
&\to 0 \quad (R\to\infty)
\end{aligned}
$$

が得られる．$\overset{*}{\mathcal{M}}{}_t^s(\mathbb{R}^n)$ の特徴付け（Lemma 2.2）により，任意の $f\in\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$
[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f \in \overset{*}{\mathcal{M}}{}_t^s(\mathbb{R}^n)
$$

とわかる．

4.2 Proof of $[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f \in \overline{\mathcal{M}}^s_t(\mathbb{R}^n)$

この証明にあたっては以下の Lemma 2.4 を用いる．そのためパラメーターを以下のように用意する．

$$\epsilon \in (0,1), \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha+\epsilon}{n} > 0, \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha+\frac{\epsilon}{3}}{n}, \quad and \quad \frac{p}{q} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

まずは作用素 $[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]$ を A，A_+，A_- に分解する．つまり

$$[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f = Af + A_+f + A_-f,$$

であって各々は

$$\begin{aligned} Af(x) &:= \chi_{B(0,L)^c}(x)[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f(x), \\ A_+f(x) &:= \chi_{2K}(x)[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f(x), \\ A_-f(x) &:= \chi_{(2K)^c}(x)\chi_{B(0,L)}(x)[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f(x). \end{aligned}$$

とする．ただし L は $Af \in \overline{\mathcal{M}}^s_t(\mathbb{R}^n)$ となるような十分大きな実数である．

$d', \delta, \theta, \gamma$ を $\frac{1}{a} = \frac{l-1}{d'}$，$\delta = \max(\frac{q}{1+q}n - \alpha, 0)$，$\theta = \frac{q+1}{2} > 1$，$\gamma = n - \theta(n-\alpha-\delta)$ を満たすようにとる．このとき $|f|^\theta \in \mathcal{M}^{\frac{p}{\theta}}_{\frac{q}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$ である．$\xi \in \mathbb{R}^n$ を $|\xi| \ll 1$，$I_\gamma(|f|^\theta)(\xi) < \infty$ を満たすようにとる．Lemma 4.2 と Minkowski の不等式より

$$\begin{aligned} &\|A_-f\|_{\mathcal{M}^a_b(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \chi_{\{2\beta \le |\cdot| \le L\}} \int_K \frac{\prod_{j=1}^l (a_j - a_j(y))}{|\cdot - y|^{n-\alpha}} f(y)dy \right\|_{\mathcal{M}^a_b(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim_{a_1} \int_K \left\| \chi_{\{2\beta \le |\cdot| \le L\}} \frac{\prod_{j=2}^l |a_j - a_j(y)|}{|\cdot - y|^{n-\alpha}} \right\|_{\mathcal{M}^a_b(\mathbb{R}^n)} |f(y)|dy \\ &\le \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{L}{\beta}]+1} \int_K \left\| \chi_{2^{k+1}K \setminus 2^k K} \frac{\prod_{j=2}^l |a_j - a_j(y)|}{|\cdot - y|^{n-\alpha}} \right\|_{\mathcal{M}^a_b(\mathbb{R}^n)} |f(y)|dy. \end{aligned}$$

積分範囲内では $1 \lesssim |\cdot - y|^\delta$ であるので

$$\begin{aligned} &\|A_-f\|_{\mathcal{M}^a_b(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{L}{\beta}]+1} \int_K \left\| \chi_{2^{k+1}K \setminus 2^k K} \frac{\prod_{j=2}^l |a_j - a_j(y)|}{|\cdot - y|^{n-\alpha-\delta}} \right\|_{\mathcal{M}^a_b(\mathbb{R}^n)} |f(y)|dy \\ &\lesssim \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{L}{\beta}]+1} \int_K \prod_{j=2}^l \left\| \chi_{2^{k+1}K \setminus 2^k K} |a_j - a_j(y)| \right\|_{L^{d'}(\mathbb{R}^n)} \frac{|f(y)|}{|\xi - y|^{n-\alpha-\delta}} dy \\ &\lesssim \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{L}{\beta}]+1} \int_K \prod_{j=2}^l \left\{ 2^{\frac{(k+1)n}{d'}} \|a_j\|_* + |a_j(y) - m_K(a_j)| \right\} \frac{|f(y)|}{|\xi - y|^{n-\alpha-\delta}} dy \end{aligned}$$

を得る．被積分関数を展開して

$$
\begin{aligned}
&\|A_- f\|_{\mathcal{M}^a_b(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim_{\{a_j\}} \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{L}{\beta}]+1} \sum_{B \subset \{2,\dots,l\}} \int_K \prod_{j \in B} |a_j(y) - m_K(a_j)| \frac{|f(y)|}{|\xi - y|^{n-\alpha-\delta}} dy \\
&\lesssim \sum_{B \subset \{2,\dots,l\}} \left\| \prod_{j \in B} |a_j - m_K(a_j)| \right\|_{L^{\frac{\theta}{\theta-1}}(K)} \times \left(\int_K \frac{|f(y)|^\theta}{|\xi - y|^{\theta(n-\alpha-\delta)}} dy \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\lesssim_{\{a_j\}} \left(I_\gamma(|f|^\theta)(\xi) \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

である．したがって

$$A_- f \in \overline{\mathcal{M}}^s_t(\mathbb{R}^n)$$

を得る．

$A_+ f$ については

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &:= \chi_{2K}(x) \int_{y \in 2K} \prod_{j=1}^{l} (a_j(x) - a_j(y)) \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \\
\mathrm{II} &:= \chi_{2K}(x) \int_{y \notin 2K} \prod_{j=1}^{l} (a_j(x) - a_j(y)) \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy
\end{aligned}
$$

として

$$A_+ f(x) = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

と分解する．

I については分数冪積分作用素の有界性を用いて示す．パラメーター a', a'', b' を

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha + \frac{\epsilon}{3}}{n}, \quad \frac{1}{a''} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha + \frac{\epsilon}{2}}{n}, \quad \text{and} \quad \frac{p}{q} = \frac{a'}{b'}$$

で定義する．このとき a', a'', a は

$$a' < a'' < a$$

を満たす．$\tilde{a} \in (a', a'')$ を $0 < \frac{1}{\tilde{a}} + \frac{\alpha + \frac{\epsilon}{2}}{n} < 1$ を満たすように任意にとる．パラメーター $\tilde{p}$，$\tilde{q}$，$\tilde{b}$，r，w を

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\tilde{a}} = \frac{1}{\tilde{p}} - \frac{\alpha + \frac{\epsilon}{2}}{n}, \quad \frac{p}{q} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}, \\
\frac{1}{a'} = \frac{m-1}{r} + \frac{1}{\tilde{a}}, \quad \text{and} \quad \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{l-m}{w} + \frac{1}{p}
\end{gathered}
$$

で定める．このとき $\tilde{p} < p$ である．これらのパラメーターを用いて

$$
\begin{aligned}
&\|\mathrm{I}\|_{\mathcal{M}^{a'}_{b'}(\mathbb{R}^n)} = \left\| \chi_{2K}(\cdot)\prod_{j=2}^{m}|a_j(\cdot)|\int_{y\in 2K}\prod_{j=m+1}^{l}|a_j(y)|\frac{|f(y)|}{|\cdot-y|^{n-\alpha-\frac{\epsilon}{2}}}dy\right\|_{\mathcal{M}^{a'}_{b'}(\mathbb{R}^n)}\\
&\le \prod_{j=2}^{m}\|\chi_{2K}(\cdot)a_j\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\left\|\chi_{2K}(\cdot)\int_{y\in\mathbb{R}^n}\chi_{2K}(y)\prod_{j=m+1}^{l}|a_j(y)|\frac{|f(y)|}{|\cdot-y|^{n-\alpha-\frac{\epsilon}{2}}}dy\right\|_{\mathcal{M}^{\tilde a}_{\tilde b}(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim_{\{a_j\}}\left\|I_{\alpha+\frac{\epsilon}{2}}\left(\chi_{2K}(\prod_{j=m+1}^{l}|a_j|)|f|\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\tilde a}_{\tilde b}(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim\left\|\chi_{2K}\left(\prod_{j=m+1}^{l}|a_j|\right)|f|\right\|_{\mathcal{M}^{\tilde p}_{\tilde q}(\mathbb{R}^n)}\\
&\le \prod_{j=m+1}^{l}\|a_j\|_{L^w(2K)}\|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

を得る.

II については Minkowski の不等式と Hölder の不等式を用いる.

$$
\begin{aligned}
&\|\mathrm{II}\|_{\mathcal{M}^{a'}_{b'}(\mathbb{R}^n)}\\
&=\left\|\chi_{2K}(\cdot)a_1(\cdot)\int_{y\notin 2K}\prod_{j=2}^{l}(a_j(\cdot)-a_j(y))\frac{f(y)}{|\cdot-y|^{n-\alpha}}dy\right\|_{\mathcal{M}^{a'}_{b'}(\mathbb{R}^n)}\\
&=\left\|\chi_{K}(\cdot)a_1(\cdot)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}K\setminus 2^kK}\prod_{j=2}^{l}(a_j(\cdot)-a_j(y))\frac{f(y)}{|\cdot-y|^{n-\alpha}}dy\right\|_{\mathcal{M}^{a'}_{b'}(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim_{a_1}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}K\setminus 2^kK}\left\|\chi_K(\cdot)\frac{\prod_{j=2}^{l}(a_j(\cdot)-a_j(y))}{|\cdot-y|^{n-\alpha}}\right\|_{\mathcal{M}^{a'}_{b'}(\mathbb{R}^n)}|f(y)|dy\\
&\lesssim\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}K\setminus 2^kK}\prod_{j=2}^{l}\left\{k\|a_j\|_*+|m_{2^{k+1}K}(a_j)-a_j(y)|\right\}\frac{|f(y)|}{(2^k\beta)^{n-\alpha}}dy.
\end{aligned}
$$

$1=\frac{1}{q}+\frac{l-1}{\mu}$ とし Hölder の不等式を用いる.

$$
\begin{aligned}
&\|\mathrm{II}\|_{\mathcal{M}^{a'}_{b'}(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k(n-\alpha)}}\|f\|_{L^q(2^{k+1}K\setminus 2^kK)}\prod_{j=2}^{l}\left\|k\|a_j\|_*+|m_{2^{k+1}K}(a_j)-a_j|\right\|_{L^\mu(2^{k+1}K\setminus 2^kK)}\\
&\lesssim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k(n-\alpha)}}\|f\|_{L^\eta(2^{k+1}K\setminus 2^kK)}\prod_{j=2}^{l}\{\|a_j\|_*k2^{\frac{kn}{\mu}}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sim_{\{a_j\}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(n-\alpha)}} \|f\|_{L^\eta(2^{k+1}K \setminus 2^k K)} k^{l-1} 2^{\frac{(l-1)kn}{\mu}} \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} |2^{k+1}K|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\eta}} \|f\|_{L^\eta(2^{k+1}K)} \frac{1}{2^{k(n-\alpha)}} k^{l-1} 2^{\frac{(l-1)kn}{\mu}} (2^{kn})^{\frac{1}{\eta}-\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f\|_{\mathcal{M}^p_\eta(\mathbb{R}^n)} k^{l-1} 2^{k(\alpha-\frac{n}{p})} \\
&\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_\eta(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

したがって $\mathrm{I}, \mathrm{II} \in \mathcal{M}^{a'}_{b'}(\mathbb{R}^n)$ より $A_+ f \in \overline{\mathcal{M}}^s_t(\mathbb{R}^n)$ が得られた.
よって $[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f \in \overline{\mathcal{M}}^s_t(\mathbb{R}^n)$ が得られたので

$$
[a_{\{1,\dots,l\}}, I_\alpha]f \in \widetilde{\mathcal{M}}^s_t(\mathbb{R}^n)
$$

が得られる.

参考文献

[1] D. R. Adams, A note on Riesz potentials. *Duke Math. J.* **42** (1975), no. 4, 765–778. [2]

[2] Y. Dongyong, M. Yan, Boundedness of commutators in Morrey spaces on nonhomogeneous spaces, *Journal of Beijing Normal University*, Vol41, **5**(2005) [3]

[3] Y. Sawano, G. Di Fazio, and D. Hakim, *Morrey Spaces: Introduction and Applications to Integral Operators and PDEs*, Vol. I, New York: Chapman and Hall/CRC, 2020. [4]

[4] Y. Sawano, D. Hakim, and D. Takesako, *Compactness of commutators in Morrey spaces*, *Analysis and Mathematical Physics*, Vol15, **83**(2025) [3, 4]

[5] Y. Sawano, and S Shirai, Compact commutators on Morrey spaces with non-doubling measures. *Georgian Mathematical Journal* **15**(2008), Number 2, 353 – 376 [3]

[6] D. Takesako, Compactness of multilinear commutators generated by VMO functions and fractional integral operator on Morrey spaces, preprint arXiv:2601.09175. [4]